

Una introducción a los retracts absolutos y a los retracts de vecindad absolutos

SERGIO MACÍAS*

Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, C.P. 04510,
México D.F., México.

Resumen. El objetivo de este trabajo es presentar algunas de las propiedades elementales que tienen los retracts absolutos y los retracts de vecindad absolutos.

Palabras claves: Cubo de Hilbert, espacio contráctil, extensor absoluto, extensor de vecindad absoluto, retracto, retracto absoluto, retracto de vecindad, retracto de vecindad absoluto.

MSC2010: 54C15, 54C55, 54G05.

An introduction to absolute retracts and absolute neighborhood retracts

Abstract. The purpose of this paper is to present elementary properties of absolute retracts and absolute neighborhood retracts.

Keywords: Hilbert cube, contractile space, absolute extensor, extensor absolute neighborhood retract, absolute retract, neighborhood retracts, absolute neighborhood retracts.

1. Introducción

A principios de los años treinta del siglo XX, Karol Borsuk define el concepto de retracto [1], así como los conceptos de retracto absoluto y retracto de vecindad absoluto [2]. La teoría de estos espacios, llamada *Teoría de los Retractos*, se ha desarrollado tanto, que para 1967 ya se habían escrito dos libros sobre ellos: [6] y [3]. La teoría de los retracts ha resultado ser muy útil en la topología de dimensión infinita [4], [9] y [10]. Se han estudiado los retracts absolutos en la teoría de los hiperespacios de espacios métricos, compactos y conexos [11] y [5] (véanse [7] y [8] para saber más sobre hiperespacios).

El objetivo de este trabajo es presentar algunas de las propiedades elementales que tienen los retracts absolutos y los retracts de vecindad absolutos.

* E-mail: sergiom@matem.unam.mx.

Recibido: 30 de septiembre de 2013, Aceptado: 26 de noviembre de 2013.

2. Preliminares

Empezaremos presentando la noción que emplearemos en el resto del trabajo.

Notación. Consideraremos los siguientes conjuntos:

- \mathbb{N} denota al conjunto de números naturales.
- \mathbb{R}^n denota al espacio euclidiano de dimensión n cuya norma, $\|\cdot\|$, está dada por:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- La *bola cerrada de dimensión n y de radio 1* es: $\mathcal{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.
- La *esfera de dimensión $n-1$ y de radio 1* es: $\mathcal{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
- El *cubo de Hilbert*, denotado \mathcal{Q} es: $\mathcal{Q} = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]_n$, donde $[0, 1]_n$ es una copia de $[0, 1]$. La distancia, ρ , entre dos puntos de \mathcal{Q} está dada por:

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (x'_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - x'_n|.$$

Definición 2.1. Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío X es *contráctil* si existen un punto x_0 en X y una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tales que $H((x, 0)) = x$ y $H((x, 1)) = x_0$, para toda $x \in X$.

Definición 2.2. Sea X un espacio métrico, separable, compacto y no vacío. Entonces $C(X, \mathbb{R})$ denota al conjunto de todas las funciones continuas de X en \mathbb{R} . A $C(X, \mathbb{R})$ se le puede dar la estructura de espacio vectorial definiendo la suma y la multiplicación por escalares de manera puntual. Si $f \in C(X, \mathbb{R})$, entonces definimos su *norma* como: $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$. Es fácil ver que $\|\cdot\|: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ es, de hecho, una norma. En consecuencia, la función $\rho: C(X, \mathbb{R}) \times C(X, \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $\rho(f, g) = \|f - g\|$ es una métrica para $C(X, \mathbb{R})$ y, por tanto, genera una topología.

Definición 2.3. Sean V un espacio vectorial métrico, separable y no vacío, y C un subconjunto no vacío de V . Decimos que C es un *conjunto convexo* si para cualesquiera dos elementos c_0 y c_1 de C , se tiene que el conjunto $\{(1-t)c_0 + tc_1 \mid t \in [0, 1]\}$ está contenido en C .

Definición 2.4. Sean V un espacio vectorial, el cual es métrico, separable y no vacío, y A un subconjunto no vacío de V . El *casco convexo de A* , denotado $\text{conv}(A)$, se define como: $\text{conv}(A) = \bigcap \{C \mid A \subset C \text{ y } C \text{ es un conjunto convexo}\}$.

Teorema 2.5 ([9, 1.2.3]). *Para cada espacio métrico, separable, compacto y no vacío (X, d) , existe un encaje isométrico $h: X \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ tal que:*

- (1) *para cada subconjunto Y de X , $h(Y)$ es un subconjunto cerrado de $\text{conv}(h(Y))$, y*
- (2) $h(X) \subset \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \|f\| \leq \text{diam}(X)\}$.

El siguiente resultado es conocido como *el Teorema de extensión de Dugundji*.

Teorema 2.6 ([9, 1.4.13]). Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, separable y no vacío. Para cada espacio X , cada subespacio cerrado A de X y toda función continua $f: A \rightarrow V$, existe una función continua $F: X \rightarrow V$ tal que $F|_A = f$ y $F(X) \subset \text{conv}(f(A))$.

Como consecuencia del Teorema 2.6, obtenemos *el Teorema de extensión de Tietze*.

Teorema 2.7. Sean X un espacio métrico, separable y no vacío y A un subconjunto cerrado de X . Si $f: A \rightarrow [0, 1]$ es una función continua, entonces existe una función continua $F: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $F|_A = f$.

Del Teorema 2.7 se obtiene *el Lema de Urysohn*.

Teorema 2.8. Sea X un espacio métrico, separable y no vacío. Si A y B son subconjuntos cerrados de X , entonces existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Teorema 2.9. Todo espacio métrico, separable y no vacío X se puede encajar en el cubo de Hilbert \mathcal{Q} .

Demostración. Recordemos que todos nuestros espacios son métricos y separables. Sea \mathcal{U} una base numerable de X . Consideremos la familia

$$\mathcal{W} = \{(U, V) \mid U, V \in \mathcal{U}, \text{Cl}(U) \subset V \text{ y } V \neq X\}.$$

Notemos que \mathcal{W} es un conjunto numerable. Para cada $(U, V) \in \mathcal{W}$, por el Teorema 2.8, existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(\text{Cl}(U)) = \{0\}$ y $f(X \setminus V) = \{1\}$. Sea $\mathfrak{F} = \{f_n\}_{n=1}^\infty$ la colección de funciones obtenidas de esta manera. Definimos $h: X \rightarrow \mathcal{Q}$ como $h(x) = (f_n(x))_{n=1}^\infty$. Es fácil ver que h es un encaje. \square

3. Retractos absolutos y retracts de vecindad absolutos

Definición 3.1. Sean X un espacio métrico, separable y no vacío y A un subespacio no vacío de X . Decimos que A es un *retracto de X* si existe una función continua $r: X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$, para toda $a \in A$. A la función r se le llama una *retracción*.

Ejemplo 3.2. Observemos que la función $r: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}^n$ dada por

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathcal{B}^n; \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{B}^n, \end{cases}$$

es una retracción.

Una propiedad importante de los retracts es la siguiente:

Teorema 3.3. Sean X un espacio métrico, separable y no vacío y A un subespacio no vacío de X . Si A es un retracto de X , entonces A es cerrado en X .

Demostración. Supongamos que A es un retracto de X y que $r: X \rightarrow A$ es una retracción. Si $A = X$ entonces, claramente, A es cerrado en X . Supongamos que $A \neq X$. Sea $x_0 \in X \setminus A$. Notemos que $r(x_0) \neq x_0$. Entonces existen dos subconjuntos abiertos U_0 y V_0 de X tales que $x_0 \in U_0$, $r(x_0) \in V_0$ y $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. Como r es continua, $r^{-1}(V_0)$ es un subconjunto abierto de X tal que $x_0 \in r^{-1}(V_0)$. Sea $W_0 = U_0 \cap r^{-1}(V_0)$. Entonces W_0 es un subconjunto abierto de X , $x_0 \in W_0$ y $W_0 \cap r(W_0) = \emptyset$. Supongamos que $W_0 \cap A \neq \emptyset$. Sea $a \in W_0 \cap A$. Entonces, como $a \in A$, $r(a) = a$ y, como $a \in W_0$, $r(a) \in W_0$. Esto implica que $a \in W_0 \cap r(W_0)$, lo cual es una contradicción. De donde, $W_0 \subset X \setminus A$ y $X \setminus A$ es abierto en X . Por tanto, A es cerrado en X . \square

Teorema 3.4. *Un subespacio A de un espacio métrico, separable y no vacío X es un retracto de X si y sólo si para cada espacio Y y cada función continua $f: A \rightarrow Y$, existe una función continua $F: X \rightarrow Y$ tal que $F|_A = f$.*

Demostración. Supongamos que A es un retracto de X . Sean Y un espacio y $f: A \rightarrow Y$ una función continua. Como A es un retracto de X , existe una retracción $r: X \rightarrow A$. Sea $F = f \circ r$. Entonces F es una función continua de X en Y tal que $F(a) = f \circ r(a) = f(a)$, para toda $a \in A$. Por tanto, $F|_A = f$.

Inversamente, supongamos que para cada espacio Y y cada función continua $f: A \rightarrow Y$, existe una función continua $F: X \rightarrow Y$ tal que $F|_A = f$. Sean $Y = A$ y $f = 1_A$. Entonces, por hipótesis, existe una función continua $F: X \rightarrow A$ tal que $F|_A = 1_A$. Por tanto, A es un retracto de X . \square

Teorema 3.5. *Todo retracto de un espacio métrico, separable y no vacío contráctil es contráctil.*

Demostración. Sean X un espacio contráctil y A un retracto de X . Sea $r: X \rightarrow A$ una retracción. Como X es contráctil, existen un punto x_0 en X y una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tales que $H((x, 0)) = x$ y $H((x, 1)) = x_0$, para toda $x \in X$. Sea $F: A \times [0, 1] \rightarrow A$ definida por $F((a, t)) = r \circ H((a, t))$, para cada $(a, t) \in A \times [0, 1]$. Entonces F es una función bien definida y continua tal que para toda $a \in A$, se tiene que $F((a, 0)) = r \circ H((a, 0)) = r(a) = a$ y $F((a, 1)) = r \circ H((a, 1)) = r(x_0)$. Por tanto, A es contráctil. \square

Definición 3.6. Sean X un espacio métrico, separable y no vacío y A un subespacio no vacío de X . Decimos que A es un *retracto de vecindad* de X si existen un abierto U de X tal que $A \subset U$ y una retracción $r: U \rightarrow A$.

Ejemplo 3.7. \mathcal{S}^n es un retracto de vecindad de \mathbb{R}^{n+1} , sean $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $r: U \rightarrow \mathcal{S}^n$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Definición 3.8. Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío X es un *retracto absoluto* si para cada espacio Z y cada encaje $h: X \rightarrow Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z , se tiene que $h(X)$ es un retracto de Z .

Definición 3.9. Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío X es un *extensor absoluto* si para cada espacio Z , cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z y toda función continua $f: A \rightarrow X$, existe una función continua $F: Z \rightarrow X$ tal que $F|_A = f$.

Definición 3.10. Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío X es un *retracto de vecindad absoluto* si para cada espacio Z y cada encaje $h: X \rightarrow Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z , se tiene que $h(X)$ es un retracto de vecindad de Z .

Definición 3.11. Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío X es un *extensor de vecindad absoluto* si para cada espacio Z , cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z y toda función continua $f: A \rightarrow X$, existen un subconjunto abierto U de Z tal que $A \subset U$ y una función continua $F: U \rightarrow X$ tal que $F|_A = f$.

Observermos que todo retracto (extensor) absoluto es un retracto (extensor) de vecindad absoluto, y el recíproco no es cierto.

Teorema 3.12. *El ser un extensor absoluto y un extensor de vecindad absoluto son propiedades topológicas.*

Demostración. Veremos que el ser un extensor de vecindad absoluto es una propiedad topológica. La prueba para el caso de un extensor absoluto es análoga.

Sean X un extensor de vecindad absoluto y Y un espacio homeomorfo a X . Sea $h: Y \rightarrow X$ un homeomorfismo. Para ver que Y es un extensor de vecindad absoluto, sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado no vacío de Z y $f: A \rightarrow Y$ una función continua. Notemos que $h \circ f: A \rightarrow X$ es una función continua. Como X es un extensor de vecindad absoluto, existen un subconjunto abierto U de Z tal que $A \subset U$ y una función continua $g: U \rightarrow X$ tal que $g|_A = h \circ f$. Definimos $F: U \rightarrow Y$ como $F = h^{-1} \circ g$. Entonces F es una función continua tal que si $a \in A$ entonces

$$F(a) = h^{-1} \circ g(a) = h^{-1} \circ h \circ f(a) = f(a).$$

De aquí se sigue que $F|_A = f$. Por tanto, Y es un extensor de vecindad absoluto. \square

Nuestro próximo objetivo es probar que los conceptos de retracto absoluto y extensor absoluto son equivalentes, y que lo mismo sucede con los conceptos de retracto de vecindad absoluto y de extensor de vecindad absoluto.

Teorema 3.13. *Sea X un espacio métrico, separable y no vacío. Entonces:*

- (1) *X es un retracto absoluto si y sólo si X es un extensor absoluto.*
- (2) *X es un retracto de vecindad absoluto si y sólo si X es un extensor de vecindad absoluto.*

Demostración. Sólo probaremos (2); la demostración de (1) es similar.

Supongamos que X es un retracto de vecindad absoluto. Veremos que X es un extensor de vecindad absoluto. Para esto, sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f: A \rightarrow X$ una función continua. Por el Teorema 2.9, existe un encaje $h': X \rightarrow Q$. Por el Teorema 2.5, existen un espacio vectorial normado V y un encaje $h'': Q \rightarrow V$ tal que $h'' \circ h'(X)$ es un subconjunto cerrado de $h''(Q)$ y, por tanto de V . Sea $h = h'' \circ h'$. Como X es un retracto de vecindad absoluto, existen un abierto U de V que contiene a $h(X)$ y una retracción $r: U \rightarrow h(X)$. Por el Teorema 2.6, existe una función continua

$g: Z \rightarrow V$ tal que $g|_A = h \circ f$. Sea $W = g^{-1}(U)$. Entonces W es un subconjunto abierto de Z tal que contiene a A . Definimos $F: W \rightarrow X$ como $F(w) = h^{-1} \circ r \circ g(w)$, para toda $w \in W$. Observemos que F es una función continua y que si $a \in A$, entonces

$$F(a) = h^{-1} \circ r \circ g(a) = h^{-1} \circ r \circ h \circ f(a) = h^{-1} \circ h \circ f(a) = f(a).$$

En consecuencia, $F|_A = f$. Por tanto, X es un extensor de vecindad absoluto.

Ahora supongamos que X es un extensor de vecindad absoluto. Mostraremos que X es un retracto de vecindad absoluto. Sean Z un espacio y $h: X \rightarrow Z$ un encaje tales que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z . Como $h(X)$ es un extensor de vecindad absoluto (Teorema 3.12), para la función identidad $1_{h(X)}$ existen un subconjunto abierto U de Z que contiene a $h(X)$ y una función continua $F: U \rightarrow h(X)$ tal que $F|_{h(X)} = 1_{h(X)}$. Esto implica que F es una retracción y que $h(X)$ es un retracto de U . Por tanto, X es un retracto de vecindad absoluto. \square

Como consecuencia de los Teoremas 3.12 y 3.13, se tiene:

Corolario 3.14. *El ser un retracto absoluto y un retracto de vecindad absoluto son propiedades topológicas.*

El siguiente resultado nos proporciona un ejemplo de retracto absoluto.

Teorema 3.15. *Si C es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado separable y no vacío V , entonces C es un retracto absoluto.*

Demostración. Sean Z un espacio y $h: C \rightarrow Z$ un encaje tal que $h(C)$ es cerrado en Z . Observemos que $h^{-1}: h(C) \rightarrow C$ es una función continua. Por el Teorema 2.6, existe una función continua $H: Z \rightarrow \text{conv}(C)$ tal que $H|_{h(C)} = h^{-1}$. Como C es convexo, $\text{conv}(C) = C$. Sea $r: Z \rightarrow h(C)$ definida como $r = h \circ H$. Entonces r es una función continua y $r(h(c)) = h \circ H(h(c)) = h \circ h^{-1}(h(c)) = h(c)$. De donde r es una retracción. Por tanto, C es un retracto absoluto. \square

Teorema 3.16. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (1) *Todo subconjunto abierto y no vacío de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.*
- (2) *Todo retracto de un retracto absoluto es un retracto absoluto.*
- (3) *Todo retracto de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.*
- (4) *El producto de una familia a lo más numerable de espacios métricos, separables y no vacíos es un retracto absoluto si y sólo si cada factor es un retracto absoluto.*
- (5) *El producto de una familia finita de retracts de vecindad absolutos es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. Veamos que se cumple (1). Sean X un retracto de vecindad absoluto y U un subconjunto abierto de X . Para mostrar que U es un retracto de vecindad absoluto, sean Z un espacio y $h: U \rightarrow Z$ un encaje de tal forma que $h(U)$ es un subconjunto cerrado de Z . Entonces $h^{-1}: h(U) \rightarrow U \subset X$ es una función continua. Como X es un

retracto de vecindad absoluto, por el Teorema 3.13, existen un subconjunto abierto V de Z tal que $h(U) \subset V$ y una función continua $F: V \rightarrow X$ tal que $F|_{h(U)} = h^{-1}$. Como U es un abierto de X , $W = F^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de V y, por tanto, de Z tal que $h(U) \subset W \subset V$. Sea $r: W \rightarrow h(U)$ dada por $r(w) = h \circ F(w)$. Observemos que r es una función continua. Para ver que r es una retracción, sea $h(u) \in h(U)$. Entonces $r(h(u)) = h \circ F(h(u)) = h \circ h^{-1}(h(u)) = h(u)$. De aquí se sigue que $h(U)$ es un retracto de W . Por tanto, U es un retracto de vecindad absoluto.

Probemos (3). La demostración de (2) se similar. Sean X un retracto de vecindad absoluto y Y un retracto de X . Sea $r: X \rightarrow Y$ una retracción. Sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f: A \rightarrow Y \subset X$ una función continua. Como X es un retracto de vecindad absoluto, por el Teorema 3.13, existen un abierto V de Z tal que $A \subset V$ y una función continua $g: V \rightarrow X$ tal que $g|_A = f$. Sea $F = r \circ g$. Entonces F es una función continua de V en Y tal que

$$F(a) = r \circ g(a) = r \circ f(a) = f(a),$$

para toda $a \in A$. De donde, $F|_A = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, Y es un retracto de vecindad absoluto.

Veamos que (4) se satisface. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\pi_m: \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow X_m$ la función proyección. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x'_n \in X_n$. Sean $m \in \mathbb{N}$ e $i_m: X_m \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ dada por $i_m(x_m) = (x'_1, \dots, x'_{m-1}, x_m, x'_{m+1}, \dots)$. Notemos que i_m es un encaje de X_m en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. También observemos que

$$i_m \circ \pi_m: \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow i_m(X_m)$$

es una retracción. De aquí se obtiene que, si $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto y $m \in \mathbb{N}$, entonces $i_m(X_m)$ es un retracto absoluto, por la parte (2) de este teorema. Por tanto, por el Corolario 3.14, X_m es un retracto absoluto. Supongamos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es un retracto absoluto. Para mostrar que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto, sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f: A \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Por el Teorema 3.13, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función continua $f_n: Z \rightarrow X_n$ tal que $f_n|_A = \pi_n \circ f$. Definimos $F: Z \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ como $F(z) = (f_n(z))_{n=1}^{\infty}$. Entonces F es una función continua tal que

$$F(a) = (f_n(a))_{n=1}^{\infty} = (\pi_n \circ f(a))_{n=1}^{\infty} = f(a).$$

Por consiguiente, $F|_A = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto.

Mostremos (5). Lo haremos para el caso de dos factores; el caso general se seguirá por inducción matemática. La prueba es similar a la dada en (4), pero incluimos los detalles para la conveniencia del lector. Supongamos que X_1 y X_2 son retracts de vecindad absolutos. Para probar que $X_1 \times X_2$ es un retracto de vecindad absoluto, sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f: A \rightarrow X_1 \times X_2$ una función continua. Por el Teorema 3.13, existen dos subconjuntos abiertos V_1 y V_2 de Z tales que $A \subset V_1$ y $A \subset V_2$, y dos funciones continuas $f_1: V_1 \rightarrow X_1$ y $f_2: V_2 \rightarrow X_2$ tales que $f_1|_A = \pi_1 \circ f$ y $f_2|_A = \pi_2 \circ f$. Sean $V = V_1 \cap V_2$ y $F: V \rightarrow X_1 \times X_2$ dada por $F(v) = (f_1(v), f_2(v))$. Entonces F es una función continua y

$$F(a) = (f_1(a), f_2(a)) = (\pi_1 \circ f(a), \pi_2 \circ f(a)) = f(a).$$

De lo anterior concluimos que $F|_A = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, $X_1 \times X_2$ es un retracto de vecindad absoluto. \checkmark

El siguiente resultado nos proporciona más ejemplos de retracts absolutos:

Corolario 3.17. *Los siguientes espacios con retracts absolutos: \mathbb{R}^n , $[0, 1]^n$, con $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{Q} y \mathbb{R}^∞ .*

Demostración. El corolario se sigue de los Teoremas 3.15 y 3.16. \checkmark

Teorema 3.18. *Todo retracto de vecindad de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. Sean X un retracto absoluto de vecindad y A un retracto de vecindad de X . Entonces existen un abierto U de X tal que $A \subset U$ y una retracción $r: U \rightarrow A$. Para ver que A es un retracto de vecindad absoluto, sean Z un espacio, B un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f: B \rightarrow A \subset X$ una función continua. Como X es un retracto de vecindad absoluto, por el Teorema 3.13, existen un abierto V de Z tal que $B \subset V$ y una función continua $g: V \rightarrow X$ tal que $g|_B = f$. Como U es un abierto de X , $W = g^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de V y, por tanto, de Z tal que $B \subset W$. Sea $F: W \rightarrow A$ dada por $F = r \circ g$. Entonces F es una función continua y

$$F(b) = r \circ g(b) = r \circ f(b) = f(b),$$

para toda $b \in B$. De esta forma obtenemos que $F|_B = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, A es un retracto de vecindad absoluto. \checkmark

Corolario 3.19. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{S}^n es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. Por el Ejemplo 3.7, \mathcal{S}^n es un retracto de vecindad de \mathbb{R}^{n+1} . Entonces, por el Corolario 3.17 y el Teorema 3.18, se tiene que \mathcal{S}^n es un retracto de vecindad absoluto. \checkmark

En la parte (5) del Teorema 3.16 sólo probamos que el producto finito de retracts de vecindad absolutos es un retracto de vecindad absoluto. El siguiente teorema nos indica por qué el resultado anterior no se puede generalizar a productos numerables.

Teorema 3.20. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ una familia numerable de espacios métricos, separables y no vacíos. Entonces $\prod_{n=1}^\infty X_n$ es un retracto de vecindad absoluto si y sólo si cada X_n es un retracto de vecindad absoluto y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que X_n es un retracto absoluto para cada $n \geq m$.*

Demostración. Supongamos que cada X_n es un retracto de vecindad absoluto y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que X_n es un retracto absoluto para cada $n \geq m$. Como $\prod_{n=1}^\infty X_n$ es homeomorfo a $\prod_{n=1}^{m-1} X_n \times \prod_{n=m}^\infty X_n$, por las partes (4) y (5) del Teorema 3.16, se tiene que $\prod_{n=1}^\infty X_n$ es un retracto de vecindad absoluto.

Supongamos que $\prod_{n=1}^\infty X_n$ es un retracto de vecindad absoluto. En la prueba de la parte (4) del Teorema 3.16 vimos que cada X_m es homeomorfo a un retracto de $\prod_{n=1}^\infty X_n$. De

donde, por la parte (3) del Teorema 3.16 y el Corolario 3.14, resulta que cada X_m es un retracto de vecindad absoluto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un punto $x_n \in X_n$. Por los Teoremas 2.9 y 2.5, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen un espacio vectorial normado V_n , un subespacio convexo C_n de V_n y un encaje $h_n: X_n \rightarrow C_n$ de tal forma que $h_n(X_n)$ es un subconjunto cerrado de C_n . Como $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$ es cerrado en $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ y $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$ es un retracto de vecindad absoluto (Corolario 3.14), existen un abierto U de $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ tal que $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n) \subset U$ y una retracción $r: U \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$. En particular, U es un abierto que tiene al punto $(h_n(x_n))_{n=1}^{\infty}$. Así que, existen $m \in \mathbb{N}$ y abiertos W_1, \dots, W_m de C_1, \dots, C_m , respectivamente, tales que

$$h_1(x_1) \in W_1, \dots, h_m(x_m) \in W_m \text{ y } (h_n(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{j=1}^m \pi_{C_j}^{-1}(W_j) \subset U,$$

donde $\pi_{C_j}: \prod_{n=1}^{\infty} C_n \rightarrow C_j$ es la función proyección para cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Por el Teorema 3.15 y la parte (4) del Teorema 3.16, tenemos que $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ es un retracto absoluto. Ahora definimos la función

$$g: \{h_1(x_1)\} \times \dots \times \{h_m(x_m)\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n \rightarrow \{h_1(x_1)\} \times \dots \times \{h_m(x_m)\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$$

como

$$\begin{aligned} g((h_1(x_1), \dots, h_m(x_m), c_{m+1}, \dots)) = \\ (h_1(x_1), \dots, h_m(x_m), \pi_{C_{m+1}}(r((h_1(x_1), \dots, h_m(x_m), c_{m+1}, \dots))), \\ \pi_{C_{m+2}}(r((h_1(x_1), \dots, h_m(x_m), c_{m+1}, \dots))), \dots). \end{aligned}$$

Se puede ver que g es una retracción. De donde, por la parte (2) del Teorema 3.16, $\prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$ es un retracto absoluto. Lo que implica, por el Corolario 3.14, que $\prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto. Finalmente, por la parte (4) del Teorema 3.16, X_n es un retracto absoluto, para toda $n \geq m+1$. \square

El siguiente teorema nos permite construir nuevos retracts absolutos y retracts de vecindad absolutos de otros dados.

Teorema 3.21. *Sean X un espacio métrico, separable y no vacío, X_1 y X_2 subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $X_0 = X_1 \cap X_2$. Entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) *Si X_0 , X_1 y X_2 son retracts absolutos, entonces X es un retracto absoluto.*
- (2) *Si X y X_0 son retracts absolutos, entonces X_1 y X_2 también son retracts absolutos.*
- (3) *Si X_0 , X_1 y X_2 son retracts de vecindad absolutos, entonces X es un retracto de vecindad absoluto.*
- (4) *Si X y X_0 son retracts de vecindad absolutos, entonces X_1 y X_2 también son retracts de vecindad absolutos.*

Demostración. Sólo probaremos (3) y (4), las demostraciones de (1) y (2) son similares.

Para ver (3), supongamos que X_0 , X_1 y X_2 son retracts de vecindad absolutos. Sean Z un espacio y $h: X \rightarrow Z$ un encaje de tal forma que $h(X)$ es un subconjunto cerrado

de Z . Mostraremos que existen un subconjunto abierto U de Z tal que $h(X) \subset U$ y una retracción $R: U \rightarrow h(X)$. Para este fin, sean:

$$Z_0 = \{z \in Z \mid d(z, h(X_1)) = d(z, h(X_2))\},$$

$$Z_1 = \{z \in Z \mid d(z, h(X_1)) \leq d(z, h(X_2))\}$$

y

$$Z_2 = \{z \in Z \mid d(z, h(X_1)) \geq d(z, h(X_2))\}.$$

Observemos que si $j \in \{0, 1, 2\}$, entonces $Z_j \cap h(X) = h(X_j)$. Además, $Z_1 \cap Z_2 = Z_0$ y $Z = Z_1 \cup Z_2$.

Como X_0 es un retracto de vecindad absoluto, por el Corolario 3.14, $h(X_0)$ es un retracto de vecindad absoluto. Como $h(X_0)$ es cerrado en Z_0 , existen un abierto V de Z_0 tal que $h(X_0) \subset V_0$ una retracción $r'_0: V_0 \rightarrow h(X_0)$. Sea V_1 un abierto de Z_0 tal que $h(X_0) \subset V_1 \subset Cl(V_1) \subset V_0$. Tomemos $W_0 = Cl(V_1)$ y $r_0 = r'_0|_{W_0}$. Dada $j \in \{1, 2\}$, definimos $r_j: W_0 \cup h(X_j) \rightarrow h(X_j)$ como:

$$r_j(z) = \begin{cases} r_0(z), & \text{si } z \in W_0; \\ z, & \text{si } z \in h(X_j), \end{cases}$$

para toda $z \in W_0 \cup h(X_j)$. Observemos que r_j es una retracción. Como $h(X_1)$ y $h(X_2)$ son retracts de vecindad absolutos (Corolario 3.14), por el Teorema 3.13, existen vecindades cerradas (por un argumento semejante al dado en el párrafo anterior) W_1 y W_2 de $W_0 \cup h(X_1)$ y $W_0 \cup h(X_2)$ en Z_1 y Z_2 , respectivamente, y funciones continuas $R_1: W_1 \rightarrow h(X_1)$ y $R_2: W_2 \rightarrow h(X_2)$ tales que $R_1|_{W_0 \cup h(X_1)} = r_1$ y $R_2|_{W_0 \cup h(X_2)} = r_2$.

Dada $j \in \{1, 2\}$, sea U_j una vecindad cerrada de $h(X_j)$ en Z_j de tal forma que $U_j \subset W_j$ y $U_j \cap Z_0 \subset W_0$. Entonces $U_1 \cap U_2 \subset W_0$. De donde se sigue que la función $R: U_1 \cup U_2 \rightarrow h(X)$ dada por:

$$R(z) = \begin{cases} R_1(z), & \text{si } z \in U_1; \\ R_2(z), & \text{si } z \in U_2, \end{cases}$$

para cada $z \in U_1 \cup U_2$, está bien definida y es una retracción. Como $U_1 \cup U_2$ es una vecindad de $h(X)$ en Z , se tiene, por tanto, que X es un retracto de vecindad absoluto.

Para probar (4), supongamos que X y X_0 son retracts de vecindad absolutos. Como X_0 es un retracto de vecindad absoluto y es cerrado en X , existen un subconjunto abierto U_0 de X tal que $X_0 \subset U_0$ y una retracción $r: U_0 \rightarrow X_0$. Definimos $R: X_1 \cup U_0 \rightarrow X_1$ como

$$R(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in X_1; \\ r(x), & \text{si } x \in U_0, \end{cases}$$

para toda $x \in X_1 \cup U_0$. Notemos que R es una retracción. Como $X_1 \cup U_0$ es un abierto de X y X es un retracto de vecindad absoluto, por la parte (1) del Teorema 3.16, se tiene que $X_1 \cup U_0$ es un retracto de vecindad absoluto. De la parte (3) del Teorema 3.16, como X_1 es un retracto de $X_1 \cup U_0$, resulta que X_1 es un retracto de vecindad absoluto.

La prueba de que X_2 es un retracto absoluto de vecindad es similar. \square

El siguiente resultado es conocido como *El Teorema de Extensión Homotópica de Borsuk*.

Teorema 3.22 ([9, 1.6.3]). *Sean X un retracto de vecindad absoluto, Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f: A \times [0, 1] \rightarrow X$ una función continua. Si existe una función continua $F_0: Z \rightarrow X$ tal que $F_0(a) = f((a, 0))$, para toda $a \in A$, entonces existe una función continua $F: Z \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para toda $z \in Z$, $F((z, 0)) = F_0(z)$ y $F((a, t)) = f((a, t))$, para toda $a \in A$ y toda $t \in [0, 1]$.*

Teorema 3.23. *Sea X un espacio métrico, separable y no vacío. Entonces X es un retracto absoluto si y sólo si X es un retracto de vecindad absoluto contráctil.*

Demostración. Supongamos que X es un retracto absoluto. Claramente, X es un retracto de vecindad absoluto. Veremos que X es contráctil. Por los Teoremas 2.9 y 2.5, existen un espacio vectorial normado V , un subespacio convexo C de V y un encaje $h: X \rightarrow C$ de tal forma que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de C . Como X es un retracto absoluto, $h(X)$ es un retracto de C . Por el Teorema 3.5, basta ver que C es contráctil. Para esto, sea c_0 un punto de C . Definimos $H: C \times [0, 1] \rightarrow C$ como $H((c, t)) = (1 - t)c + tc_0$. Como C es convexo, H está bien definida y es continua. Además, para cada $c \in C$, $H((c, 0)) = (1 - 0)c + 0c_0 = c$ y $H((c, 1)) = (1 - 1)c + 1c_0 = c_0$. De donde C es contráctil. Por tanto, X es contráctil.

Ahora supongamos que X es un retracto de vecindad absoluto y contráctil. Para ver que X es un retracto absoluto, sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f: A \rightarrow X$. Como X es contráctil, existen un punto x_0 en X y una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tales que para toda $x \in X$, $H((x, 0)) = x$ y $H((x, 1)) = x_0$. Sea $f': A \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por $f'((a, t)) = H((f(a), 1 - t))$. Sea $F_0: Z \rightarrow X$ dada por $F_0(z) = x_0$. Entonces F_0 es una función continua y, para toda $a \in A$, $f'((a, 0)) = H((f(a), 1 - 0)) = H((f(a), 1)) = x_0 = F_0(a)$. Por el Teorema 3.22, existe una función continua $F: Z \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para cada $(a, t) \in A \times [0, 1]$, $F((a, t)) = f'((a, t))$. Sea $F_1: Z \rightarrow X$ dada por $F_1(z) = F((z, 1))$. Entonces F_1 es una función continua tal que para toda $a \in A$,

$$F_1(a) = F((a, 1)) = f'((a, 1)) = H((f(a), 1 - 1)) = H((f(a), 0)) = f(a).$$

De donde, $F_1|_A = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, X es un retracto absoluto. □

Agradecimiento. El autor le agradece al árbitro sus comentarios.

Referencias

- [1] Borsuk K., “Sur les rétractes”, *Fund. Math.* 17 (1931), 152–170.
- [2] Borsuk K., “Über eine Klasse von Lokal Zusammenhängenden Räume”, *Fund. Math.* 19 (1932), 220–242.
- [3] Borsuk K., *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne Tom 44, Warsaw, 1967.
- [4] Chapman T.A., *Lecture on Hilbert cube manifolds*, Regional Conference Series in Mathematics, No. 28, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.

- [5] Ganea T., “Symmetrische potenzen topologischer Räume”, *Math. Nachr.* 11 (1954), 305–316.
- [6] Hu S.T., *Theory of retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.
- [7] Macías S., *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.
- [8] Macías S., “Un breve panorama de los hiperespacios de continuos”, *Rev. Integr. Temas Mat.* 23 (2005), no. 2, 1–13.
- [9] Van Mill J., *Infinite-dimensional topology*, North Holland Mathematical Library, Amsterdam, 1989.
- [10] Van Mill J., *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North Holland Mathematical Library, Amsterdam, 2001.
- [11] Wojdysławski M., “Rétracts absolus et hyperspaces des continus”, *Fund. Math.* 32 (1939), 184–192.